# EXERCÍCIOS CAPÍTULO 2

1. Uma caixa contém cinco bolas, das quais duas são pretas. As bolas pretas estão numeradas de 1 a 2, e as outras bolas, de 3 a 5. Extraem-se duas bolas ao acaso (uma a seguir à outra e sem reposição), e observa-se o número inscrito em cada uma delas.
   a) Enumere os elementos do espaço de resultados associado à experiência.
   b) Defina no espaço de resultados os seguintes acontecimentos:
      $A_1$ – «A primeira bola observada é preta.»
      $A_2$ – «A segunda bola observada é preta.»
      $A_3$ – «As duas bolas observadas são pretas.»
      $A_4$ – «Pelo menos uma das bolas observadas é preta.»
      $A_5$ – «Exactamente uma das bolas observadas é preta.»
      $A_6$ – «A soma dos números inscritos nas bolas observadas é superior a sete.»
   c) Represente graficamente o espaço de resultados e os acontecimentos referidos na alínea anterior.

2. Duas lâmpadas vão ser submetidas a um teste que consiste em mantê-las ligadas até que ambas falhem, registando-se a duração de cada uma delas. Sabe-se que nenhuma das lâmpadas dura mais de 1600 horas.
   Represente o espaço de resultados e os seguintes acontecimentos:
      $A$ – «Nenhuma das lâmpadas tem duração superior a 1000 horas.»
      $B$ – «Só uma das lâmpadas tem duração superior a 1000 horas.»
      $C$ – «Uma das lâmpadas dura pelo menos o dobro da outra.»
      $D$ – «A soma da duração das duas lâmpadas é superior a 2000 horas.»

3. Construa e classifique os espaços de resultados associados com as seguintes experiências aleatórias:
   a) Observação do número de pontos no lançamento de um dado de seis faces.
   b) Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima.
   c) Lançamento de um dado, seguido do lançamento de uma moeda.
   d) Lançamento de uma moeda até ao aparecimento de coroa.

4. Num curso superior, 70% dos alunos têm computador em casa, 40% têm computador portátil e 30% têm os dois. Escolhido um aluno ao acaso, calcule a probabilidade de:
   a) Ter pelo menos um dos tipos de computadores.
   b) Não ter computador.
   c) Ter um e um só computador.

5. A meteorologia prevê que chova no próximo sábado com probabilidade 0.25, e que chova no próximo domingo com probabilidade 0.25. É lícito deduzir que, de acordo com a meteorologia, a probabilidade de chover no próximo fim-de-semana é de 0.5?

6. Um sistema electrónico é formado por dois subsistemas, $A$ e $B$. De ensaios anteriores sabe-se que: a probabilidade de $A$ falhar é 0.2, a probabilidade de $B$ falhar sozi-

nho é 0.15, e a probabilidade de $A$ e $B$ falharem simultaneamente é 0.15. Determine a probabilidade de:

a) $B$ falhar.
b) Falhar apenas $A$.
c) Falhar pelo menos um deles, $A$ ou $B$.
d) Não falhar nem $A$ nem $B$.
e) $A$ e $B$ não falharem simultaneamente.

7. Numa cidade são publicados três semanários: S1, S2 e S3. Sabe-se que:
   - 22% dos habitantes lêem S1;
   - 15% dos habitantes lêem S2;
   - 13% dos habitantes lêem S3;
   - 8% dos habitantes lêem S1 e S2;
   - 5% dos habitantes lêem S1 e S3;
   - 4% dos habitantes lêem S2 e S3;
   - 2% dos habitantes lêem os três.

   Calcule a probabilidade de um habitante da cidade, escolhido ao acaso:
   a) Ler pelo menos um semanário.
   b) Ler um e um só semanário.
   c) Não ler qualquer dos semanários.

8. Dos trabalhadores de uma empresa que utilizam regularmente os transportes públicos na sua deslocação de casa para o emprego sabe-se que:
   - 54% utilizam exclusivamente um destes meios de transporte: autocarro (22%), metropolitano (25%) ou comboio (7%);
   - 44% utilizam pelo menos dois daqueles três meios de transporte: 18% utilizam o autocarro e o metropolitano; 17% utilizam o autocarro e o comboio; 19% utilizam o metropolitano e o comboio.

   a) Tendo presente que existem outros meios de transporte público para além dos enunciados atrás, qual a percentagem de trabalhadores que não utilizam qualquer destes meios de transporte?
   b) Qual a percentagem de trabalhadores que utilizam os três meios de transporte na sua deslocação para o trabalho?

9. Sejam $A$ e $B$ acontecimentos de um espaço de resultados $\Omega$. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:
   a) Se $A \cup B$ se realizou, então sabemos que $B$ também se realizou.
   b) O acontecimento $A$ realiza-se sempre que $A - B$ se realiza.
   c) Se $A \subset B$ e $P(B) = 0$, então pode afirmar-se que $P(A) = 0$.
   d) Se $P(A) = 0.75$ e $P(B) = 0.5$, então $A$ e $B$ não podem ser mutuamente exclusivos.
   e) Se $P(A - B) = 0$ então $P(A \cup B) = P(B)$.

10. Para cada um dos casos seguintes indique, justificando, qual a interpretação do conceito de probabilidade (clássica, frequencista ou subjectiva) que julga mais adequada:
    a) Probabilidade de no próximo ano a taxa de inflação ser superior a 5%.

b) Probabilidade de obter a face com seis pontos ao lançar um dado regular.
c) Probabilidade de uma peça extraída ao acaso de um lote muito numeroso ser defeituosa.
d) Probabilidade de obter o primeiro prémio numa dada semana em que compra um bilhete de lotaria.
e) Probabilidade de o PIB crescer mais que 3%, no próximo ano.
f) Probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso de entre as que entram num armazém, realizar uma compra.

11. Calcule as probabilidades dos acontecimentos da alínea b) do exercício 1.

12. O restaurante "Bem Comer" tem na sua ementa cinco entradas, quatro pratos de peixe, cinco de carne e seis sobremesas.
    a) Suponha que uma refeição completa é composta por quatro tipos de prato: entrada, prato de peixe, prato de carne e sobremesa. Quantas refeições diferentes se podem comer neste restaurante?
    b) Se se admitir que a refeição é composta por quaisquer três daqueles tipos de prato, quantas refeições diferentes se podem comer?

13. Da sucessão de números naturais, $1, 2, \ldots, n$, escolhem-se dois ao acaso, sem reposição. Calcule a probabilidade de um deles ser menor que $k$ ($k = 2, 3, \ldots, n-1$) e o outro maior.

14. Numa turma com 30 alunos, 20 são rapazes e 10 são raparigas. Vão sortear-se 4 alunos dos 30 para formar uma comissão representativa da turma.
    a) Calcule a probabilidade de serem sorteados primeiro dois rapazes e depois duas raparigas.
    b) Qual a probabilidade de que na comissão haja dois rapazes e duas raparigas?
    c) Qual a probabilidade do primeiro aluno escolhido ser rapaz? E do terceiro?

15. Admita que num CD com 14 músicas gosta de 8 delas. Utilizando o botão de escolha aleatória do leitor de CD, cada uma das 14 músicas tocará uma vez, por ordem aleatória. Qual a probabilidade de, nas duas primeiras músicas, gostar apenas de uma delas?

16. O *Mastermind* é um jogo em que o 1.º jogador escolhe 4 alfinetes de cor diferente (6 cores disponíveis para cada alfinete) e os espeta por determinada ordem num tabuleiro, escondidos da vista do 2.º jogador. Este tem por objectivo descobrir a chave escondida. Qual a probabilidade de acertar logo na 1.ª tentativa?

17. Considere que um sistema informático gera aleatoriamente uma palavra-chave para um novo utilizador constituída por um conjunto de 5 letras (eventualmente repetidas) de um alfabeto com 26 letras (não existe distinção entre maiúsculas e minúsculas). Qual a probabilidade de não haver letras repetidas numa palavra-chave?

18. Um saco tem 6 bolas, 4 das quais são brancas.
    a) Se se extrair duas bolas, ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de pelo menos uma delas ser branca?

b) Lança-se um dado perfeito: se sair um número ímpar extrai-se uma bola do saco e se sair um número par extraem-se duas bolas, ao acaso e sem reposição, do saco. Qual a probabilidade das bolas extraídas serem brancas?

19. O jogo do Totoloto consiste na extracção de cinco bolas, sem reposição, de uma primeira esfera com bolas numeradas de 1 a 49 e uma sexta bola (número da sorte) de uma segunda esfera com bolas numeradas de 1 a 13. Foi feita uma aposta simples, que corresponde a uma escolha de cinco números de entre os primeiros 49 e mais um número da sorte entre os outros 13.
   a) Qual a probabilidade de sair o quinto prémio, ou seja, de acertar em 2 dos 5 sorteados da primeira esfera?
   b) O primeiro prémio significa acertar em todos os números sorteados: nos cinco da primeira esfera mais o número da sorte. Calcule a probabilidade desse acontecimento.

20. O jogo do Euromilhões consiste na extracção, sem reposição, de 5 números (de 1 a 50) e de duas estrelas (numeradas de 1 a 11). Feita uma aposta, que corresponde à escolha de 5 números e 2 estrelas, calcule:
   a) Qual a probabilidade de ganhar o primeiro prémio (acertar em 5 números e 2 estrelas)?
   b) Qual a probabilidade de sair o último prémio (13º prémio: acertar em 2 números e 0 estrelas)? E o penúltimo (12º prémio: acertar em 2 números e 1 estrela)?

21. Num conselho de administração têm assento 15 pessoas. Destas, 10 são favoráveis à proposta $A$, e 5 são favoráveis à proposta $B$.
   a) Qual a probabilidade de a proposta $B$ ganhar se a decisão final for delegada numa comissão de 3 elementos a sortear aleatoriamente?
   b) Se a comissão tiver 4 elementos, qual a probabilidade de se verificar um empate?

22. Considere um teste de resposta múltipla com 20 perguntas, cada uma com 4 respostas possíveis. Admitindo que as respostas são dadas ao acaso, que as perguntas são igualmente pontuadas (com um valor por pergunta) e que não se penalizam negativamente as respostas erradas:
   a) Qual a probabilidade de errar todas as respostas?
   b) Qual a probabilidade de ter nota superior a 9 valores? Formalize.

23. Considere uma caixa com 20 bolas: 7 pretas, 5 brancas e as restantes amarelas.
   a) São extraídas duas bolas sem reposição. Calcule a probabilidade de pelo menos uma bola ser preta.
   b) Se se extraírem seis bolas, sem reposição, qual a probabilidade de serem duas de cada cor? E se a extracção for feita com reposição?
   c) Uma experiência aleatória consiste em lançar um dado perfeito e em seguida extrair da caixa, sem reposição, um número de bolas igual ao número de pontos obtido no lançamento do dado. Calcule a probabilidade de todas as bolas extraídas serem pretas.

24. Numa experiência de aprendizagem, um indivíduo realiza duas vezes seguidas uma determinada tarefa, podendo falhar ou ser bem sucedido em cada uma delas. A probabilidade de falhar a primeira tentativa é de 0.25. Se falhar a primeira, a probabilidade de ser bem sucedido na segunda é de 0.5. Se for bem sucedido na primeira, a probabilidade de falhar na segunda é de 0.1. Qual a probabilidade de falhar a segunda tentativa?

25. A probabilidade de o serviço de expediente de uma empresa se esquecer de *colocar* uma carta no correio é de 0.10, a probabilidade de o correio não a *enviar* é de 0.09, e a probabilidade de o destinatário não a *receber*, dado que foi enviada, é de 0.11. Qual a probabilidade de o serviço de expediente se ter esquecido de colocar a carta, sabendo-se que o destinatário não a recebeu?

26. Num torneio entre as sociedades recreativas $A$ e $B$, realizam-se três jogos de basquetebol, com três equipas de ambas as sociedades: $A_1$ contra $B_1$; $A_2$ contra $B_2$; $A_3$ contra $B_3$. As probabilidades da sociedade $A$ ganhar os jogos são, respectivamente, 0.8, 0.4 e 0.4. Sabendo que nos jogos de basquetebol não há empates, e que para vencer o torneio é preciso ganhar pelo menos dois dos jogos, qual das sociedades recreativas é a favorita?

27. Com o objectivo de preencher um período de 90 minutos de emissão televisiva, estão disponíveis dois programas com a duração de uma hora cada – um musical e um de desporto – e três programas com duração de 30 minutos cada – um de informação e dois musicais – com os quais se podem construir diversas grelhas de programação (a ordem é relevante!), com a duração total pretendida.
    a) Escolhendo ao acaso uma das possíveis grelhas de programação, qual a probabilidade de que ela contenha apenas programas musicais?
    b) Em 10% das grelhas só com programas de 30 minutos normalmente ocorrem problemas de transmissão, o que se verifica apenas em 5% das outras grelhas de programação. Calcule a probabilidade de, escolhida uma grelha ao acaso, haver problemas de transmissão.

28. Uma fábrica utiliza três máquinas para a produção de um mesmo produto, com as seguintes percentagens de produção: M1 - 40%; M2 - 35%; M3 - 25%. As percentagens de peças defeituosas produzidas por cada máquina são, respectivamente: 4%, 2% e 1%.
    a) Escolhida uma peça ao acaso da produção total, qual a probabilidade de ser não defeituosa?
    b) Qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina M1, observando-se que é defeituosa?
    c) Se forem retiradas duas peças, sucessivamente e com reposição, da produção total, qual a probabilidade de que uma seja defeituosa, e outra, não?

29. Os trabalhadores da companhia Segura Lda. foram classificados em três níveis de acordo com o grau de instrução: formação mínima, formação média e formação superior. Sabe-se que:

- Desses trabalhadores, 55% têm salário superior a 1000 euros;
- 40% dos trabalhadores com formação média tem salário superior a 1000 euros;
- 70% dos trabalhadores com formação superior tem salário superior a 1000 euros;
- Nenhum dos trabalhadores com formação mínima tem salário superior a 1000 euros;
- A percentagem de trabalhadores com formação mínima é 10%.

a) Calcule a probabilidade de um trabalhador escolhido ao acaso ter formação média.

b) Determine a probabilidade de um trabalhador ter formação superior, sabendo que ganha mais de 1000 euros.

30. Uma empresa utiliza 3 linhas de montagem, A1, A2 e A3, no fabrico de determinado produto. Os produtos fabricados na linha A1 são defeituosos em 5% dos casos, os da linha A2, em 8%, e os da linha A3, em 10%. Sabendo que a linha A1 corresponde a 50% da produção e a linha A2 a 30%, qual a probabilidade de um produto escolhido ao acaso ser defeituoso? E se for defeituoso, qual a probabilidade de ele provir de cada uma das linhas de fabrico?

31. Uma companhia de seguros estima que 30% de todos os acidentes de automóvel são, em parte, causados por más condições atmosféricas, e que 20% de todos os acidentes de automóvel envolvem danos corporais. Adicionalmente, dos acidentes que envolvem danos corporais, 40% foram, em parte, causados por más condições atmosféricas.

a) Qual a probabilidade de que um acidente escolhido ao acaso tenha sido, em parte, causado por más condições atmosféricas e tenham ocorrido danos corporais.

b) Os acontecimentos "acidentes causados, em parte, por más condições atmosféricas" e "acidentes envolvendo danos corporais" são independentes?

c) Se num acidente escolhido ao acaso as causas foram, em parte, devidas a más condições atmosféricas, qual a probabilidade de que tenham ocorrido danos corporais?

d) Qual a probabilidade de que um acidente escolhido ao acaso não tenha sido, em parte, causado por más condições atmosféricas e não tenham ocorrido danos corporais?

32. O António na sua deslocação de casa para a escola apanha todos os dias à mesma hora o primeiro de três autocarros que servem a sua escola. Estes três autocarros - $A$, $B$ e $C$ - têm percursos diferentes e passam habitualmente, nesse local e nessa hora, com as seguintes frequências: $A$ e $C$ passam com a mesma frequência que é igual a metade da frequência com que passa $B$. Da experiência passada sabe-se ainda que o António quando apanha o autocarro $A$ chega a horas em 90% das vezes, descendo esta percentagem para 80% e 60% quando apanha o autocarro $C$ e $B$, respectivamente.

a) Calcule a percentagem de vezes que o António chega atrasado às aulas.

b) Qual a percentagem de vezes que apanha o autocarro $B$ e chega atrasado.

33. Numa pastelaria fabrica-se bolo-rei. Sabe-se que, 20% dos bolos são de tamanho grande, 50% são pequenos e os restantes são de tamanho médio. Uma fava é colocada em 60% dos bolos pequenos e em 20% de cada um dos outros. Nos bolos grandes, quando se coloca a fava, também se põe um brinde especial.
    a) Qual a percentagem de bolos com brinde especial?
    b) Admitindo que comprou dois bolos naquela pastelaria, qual a probabilidade de ambos terem fava?

34. Os dois mais importantes fornecedores de ovos de um supermercado (F1 e F2) fornecem, respectivamente, 50% e 40% do total dos ovos adquiridos pelo supermercado. Alguns dos ovos vêm estragados, tendo-se apurado que, dos ovos estragados, 60% são fornecidos por F1 e 30% por F2. Sabe-se também que a percentagem de ovos estragados dos outros fornecedores é de 5%.
    a) Qual a percentagem de ovos estragados recebidos pelo supermercado?
    b) Qual a percentagem de ovos estragados fornecidos por F1?
    c) Escolhidos 6 ovos ao acaso, qual a probabilidade de 3 deles terem sido fornecidos por F2?

35. Uma prova de Estatística tem a duração de duas horas. Dos alunos que entregam a prova, sabe-se que 20% o fazem antes das 2 horas, 50% no limite fixado e os restantes depois. Têm nota positiva 70% dos primeiros, 50% dos segundos e 15% dos últimos.
    a) Qual a percentagem de alunos com nota positiva?
    b) Comente a seguinte frase: "dos alunos que têm nota positiva, mais de metade entregou dentro do tempo regulamentar".
    c) Em 10 alunos escolhidos ao acaso, dos que entregam a prova, qual a probabilidade de exactamente quatro deles terem-na feito no tempo fixado?

36. Num estudo sobre "novos hábitos" dos alunos observa-se que 15% acham normal "usar" o telemóvel na aula, enquanto outros 20% pensam que é na aula a melhor altura para pôr a conversa em dia. Por outro lado, 90% destes últimos nunca têm dúvidas sobre a matéria leccionada, enquanto 20% dos que "usam" o telemóvel na aula e 30% dos restantes ("os bem comportados"), apresentam ocasionalmente dúvidas.
    a) Foi posta uma dúvida sobre a matéria. Calcule a probabilidade de ser um dos alunos que "usam" o telemóvel.
    b) Pode afirmar-se que mais de 80% dos alunos não apresentam dúvidas na aula?

37. A fim de seleccionar uma pessoa para certo serviço, cada candidato é submetido sucessivamente a três testes – $A$, $B$ e $C$ –, só passando ao teste seguinte se tiver uma pontuação pelo menos igual a 60%. São seleccionados os candidatos que tenham pelo menos 60% em cada teste ou que obtenham pelo menos 90% em algum teste. Os candidatos são submetidos às provas um a um, parando logo que haja um deles em condições de ser seleccionado. Da experiência sabe-se que:
    - dos indivíduos que fazem o teste $A$: 10% têm pelo menos 90%; 30% têm entre 60% e 90%;

- dos indivíduos que passam ao teste $B$: 20% têm neste teste pelo menos 90%; 40% têm neste teste entre 60% e 90%;
- dos indivíduos que passam ao teste $C$: 50% têm neste teste pelo menos 60%.

Qual a probabilidade de se ter de analisar exactamente dois indivíduos para se seleccionar um candidato?

38. No trajecto de um avião de guerra há duas estações de radar inimigas equipadas com baterias antiaéreas, que são accionadas só se o avião for detectado. O avião tem uma probabilidade de 0.25 de ser detectado pela 1.ª estação, e, sendo detectado, tem três hipóteses em cinco de não ser abatido por essa estação. Se o avião não for detectado pela 1.ª estação, ele aproxima-se da segunda nas mesmas condições que a primeira. Em contrapartida, se a 1.ª estação o detecta sem o abater ele é de certeza detectado e abatido pela 2.ª estação.
   a) Qual a probabilidade de o avião não ser abatido pela 1.ª estação?
   b) Qual a probabilidade de o avião não ser abatido?
   c) Sabendo que o avião foi abatido, qual a probabilidade de ter sido a 1.ª estação a abatê-lo?

39. A probabilidade de um indivíduo de determinada cidade ser diabético é 0.02. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 90% dos diabéticos e em 5% dos não diabéticos.
   a) Qual a probabilidade de o teste ser positivo, para um indivíduo escolhido ao acaso?
   b) Sabendo que o teste é positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser diabético?

40. Em certo clube de futebol o plantel é constituído por 20 jogadores, dos quais 5 são estrangeiros. Num outro clube o plantel é constituído por 25 jogadores sendo 8 estrangeiros.
   a) Se forem seleccionados, aleatoriamente e sem reposição, 5 jogadores destes dois clubes, qual é a probabilidade de 2 serem estrangeiros?
   b) Seleccionado um jogador, ao acaso, verificou-se que era português. Qual a probabilidade de pertencer ao clube com maior número de estrangeiros?

41. Três lâmpadas estão ligadas em paralelo a um circuito eléctrico, o que significa que para haver corrente no circuito pelo menos uma delas tem de estar acesa. A probabilidade de uma qualquer delas se queimar por excesso de tensão na rede é igual a 0.5.
   a) Qual a probabilidade de haver corrente no circuito em caso de tensão elevada?
   b) No caso de uma subida de tensão na rede, qual a probabilidade de se queimarem duas lâmpadas?

42. Maria, uma promissora engenheira química, está interessada em saber se determinada substância está contaminada por uma impureza que conduz à sua inutilização. Existe um teste laboratorial que tem probabilidade 0.8 de assinalar a impureza quando a substância está efectivamente contaminada, e probabilidade de 0.1 de assinalar a presença da impureza quando esta não está contaminada. Sabe-se ainda que, antes

de efectuar qualquer teste, a probabilidade da substância estar contaminada por essa impureza é de 0.4.

a) Qual a probabilidade de um teste laboratorial assinalar a presença da impureza?
b) Tendo o teste assinalado a impureza, calcule a probabilidade da substância estar efectivamente contaminada.

43. Por precaução, dada a sua inexperiência, a engenheira química do exercício anterior efectuou de forma independente duas vezes o teste laboratorial à mesma substância.
   a) Qual a probabilidade dos dois testes acusarem a presença da impureza se a substância estiver efectivamente contaminada? E se não estiver contaminada?
   b) Calcule a probabilidade de os dois testes acusarem a presença da impureza.
   c) Sabendo que os dois testes acusaram a presença da impureza, qual a probabilidade da substância estar efectivamente contaminada. Comente tendo em conta os resultados do exercício anterior.

44. Sabe-se que determinado vírus, para o qual existe um tratamento que permite controlar de forma eficaz a sua evolução, afecta alguns indivíduos em idade adulta. A doença manifesta-se de forma grave em 2% dos casos, de forma moderada, em 12%, e não afecta os restantes. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 95% dos casos graves, em 80% dos casos moderados e, ainda, em 5% dos que estão saudáveis.
   a) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade do teste dar positivo?
   b) Mostre que a maioria das vezes em que o teste dá positivo, o indivíduo está afectado moderadamente pelo vírus.
   c) Escolhidos 100 indivíduos ao acaso, qual a probabilidade de 3 deles estarem gravemente afectados pelo vírus?

45. Na produção de certo tipo de peça verifica-se que 3% resultam defeituosas. Para reduzir ao mínimo a comercialização de peças com defeito, foi instalado um controlo de qualidade que detecta 95% das peças efectivamente defeituosas, embora também classifique como tal 4% das que o não são.
   a) Calcule a percentagem de peças rejeitadas pelo controlo de qualidade, e verifique se a maioria delas são de boa qualidade.
   b) Escolhida uma peça ao acaso, de entre as que passaram o controlo de qualidade, qual a probabilidade ser defeituosa?
   c) Sabendo que as peças, depois de submetidas ao controlo de qualidade, são vendidas em lotes de 1000, calcule a percentagem de lotes com mais que uma peça defeituosa.

46. No seu percurso habitual para a escola, um estudante passa por dois semáforos de funcionamento independente. A probabilidade de cada um dos semáforos estar "verde", para ele, é de 0.4 para o primeiro e 0.5 para o segundo. Atendendo à hora de saída habitual, e sem outros contratempos, nos dias ditos “normais” ele só chega à escola a tempo do primeiro toque para as aulas, se pelo menos um dos semáforos estiver “verde”.

Num dia em que o estudante chegou à escola antes do primeiro toque qual a probabilidade de ter apanhado somente um dos semáforos "verdes".

47. Fazem-se 3 lançamentos de um dado regular. O acontecimento $A_1$ realiza-se quando o resultado do primeiro lançamento é 1 ou 2; o acontecimento $A_2$ realiza-se quando o resultado do segundo lançamento é 3 ou 4; o acontecimento $A_3$ realiza-se quando o resultado do terceiro lançamento é 5 ou 6. Calcule $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

48. Os acontecimentos $A_1$, $A_2$ e $A_3$ constituem uma partição do espaço de resultados $\Omega$, todos com probabilidade diferente de zero. Mostre que, se $B \subset (A_2 \cup A_3)$, então $P(B) = P(\overline{A_1})P(B \mid \overline{A_1})$.

49. Sejam *A* e *B* acontecimentos independentes, definidos no mesmo espaço de resultados, sendo $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 3/4$.
    a) Calcule $P(A \cup B)$ e $P(B \mid A \cup B)$.
    b) Mostre que os acontecimentos complementares também são independentes.

50. Dados os acontecimentos *A* e *B*, mostre que,
$$P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B).$$

51. Mostre que, se $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$, então os acontecimentos *A* e *B* são independentes.

52. Considerem-se os acontecimentos *A*, *B* e *C*, definidos sobre um mesmo espaço de resultados. Suponha que: as probabilidades destes acontecimentos são não nulas; *A* está contido em *C*; *C* e *B* são incompatíveis. Mostre que
$$P\{(A \cup B) \mid C\} = \frac{P(A)}{P(C)}.$$

53. Suponha que tem um amigo que nunca estudou probabilidades. Recorrendo a exemplos ilustrativos, explique-lhe a diferença entre acontecimentos mutuamente exclusivos e acontecimentos independentes.

54. Prove que, se $P(B) > 0$, então $P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B)$.

55. Prove que, se $P(A \mid E) \ge P(B \mid E)$ e $P(A \mid \overline{E}) \ge P(B \mid \overline{E})$, então $P(A) \ge P(B)$.

56. Um sistema electrónico tem *n* unidades que funcionam de forma independente, cada uma das quais falha com probabilidade *p*. O sistema falha sempre que se avariarem *k* ou mais unidades $(k < n)$. Qual a probabilidade de o sistema falhar?

57. É possível ter uma situação em que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/3$? Justifique.

58. Suponha que vai passar um fim-de-semana a Londres viajando de avião. Considere os seguintes acontecimentos:
    - $A \equiv$ «a minha mala perde-se na viagem de ida»;
    - $B \equiv$ «a minha mala perde-se na viagem de regresso».

Sabendo que os dois acontecimentos são independentes, que $P(A \cup B) = 0.0298$, que $P(A \cap B) = 0.0002$ e que $P(A) < P(B)$, determine $P(A)$ e $P(B)$.

59. Sejam $A$, $B$ e $C$ acontecimentos de um espaço de resultados $\Omega$. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:
   a) Se $A = B \cup C$ então $P(A) \geq P(B)$.
   b) Os acontecimentos $A$ e $B$ dizem-se independentes se não se podem realizar simultaneamente.
   c) Se $A \cup B = \Omega$, então $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$.
   d) Se $1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(A) \times P(B)$ então pode afirmar-se que os acontecimentos $A$ e $B$ são independentes.
   e) Sendo $A$ e $B$ acontecimentos independentes e com probabilidade positiva, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   f) Com $0 < P(B) < 1$ então $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) = 1$.

**SOLUÇÕES**

1. a) $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \wedge i \neq j\}$, 20 elementos;

   b) $A_1 = \{(i, j) : i = 1, 2 \wedge j = 1, 2, 3, 4, 5 \wedge i \neq j\}$
   $= \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5)\}$.

   $A_2 = \{(i, j) : j = 1, 2 \wedge i = 1, 2, 3, 4, 5 \wedge i \neq j\}$
   $= \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$.

   $A_3 = \{(i, j) : i, j = 1, 2 \wedge i \neq j\} = \{(1,2), (2,1)\} = A_1 \cap A_2$.

   $A_4 = \{(i, j) \in \Omega : i = 1, 2 \vee j = 1, 2\} = A_1 \cup A_2$,

   $A_5 = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$
   $= A_4 - A_3$,

   $A_6 = \{(i, j) \in \Omega : i + j > 7\} = \{(3,5), (4,5), (5,3), (5,4)\}$.

2. $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1600 \wedge 0 \leq y \leq 1600\} \subset \Re^2$,

   $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1000 \wedge 0 \leq y \leq 1000\}$,

   $B = \{(x, y) : (1000 < x \leq 1600 \wedge 0 \leq y \leq 1000) \vee$
   $(0 \leq x \leq 1000 \wedge 1000 < y \leq 1600)\}$,

   $C = \{(x, y) : (x \geq 2y \vee y \geq 2x) \wedge 0 \leq x \leq 1600 \wedge 0 \leq y \leq 1600\}$,

   $D = \{(x, y) : x + y > 2000 \wedge 0 \leq x \leq 1600 \wedge 0 \leq y \leq 1600\}$.

3. a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (discreto, finito); b) $\Omega = \{F, C\}$ (discreto, finito);

   c) $\Omega = \{(1, F), (1, C), (2, F), (2, C), (3, F), (3, C), (4, F), (4, C), (5, F), (5, C), (6, F), (6, C)\}$ (discreto, finito);

   d) $\Omega = \{C, FC, FFC, FFFC, \ldots\}$ (discreto, em infinidade numerável).
4. a) 0.8; b) 0.2; c) 0.5.
5. Não. É menor ou igual a 0.5 (só seria 0.5 se fosse zero a probabilidade de chover em ambos os dias).
6. a) 0.3; b) 0.05; c) 0.35; d) 0.65; e) 0.85.
7. a) 0.35; b) 0.22; c) 0.65.
8. a) 0.02; b) 0.05.
9. a) F; b) V; c) V; d) V; e) V.
10. a) e) subjectiva; b) d) clássica; c) f) frequencista.
11. 0.4, 0.4, 0.1, 0.7, 0.6, 0.2.
12. a) 600; b) 490.
13. $\dfrac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.
14. a) 0.052; b) 0.312; c) 2/3, 2/3.
15. 0.5275.
16. 0.0028.

17. 0.6644.
18. a) 0.9333 ; b) 0.5333
19. a) 0.069454 ; b) $4.03397\times10^{-8}$.
20. a) $8.58135\times10^{-9}$ ; b) 0.04384; 0.02192.
21. a) 0.2418; b) 0.3297.
22. a) 0.0032; b) 0.0139.
23. a) 0.5895; b) 0.1517, 0.1103; c) 0.0833.
24. 0.2.
25. 0.3689.
26. A sociedade recreativa *A*, 0.544.
27. a) 0.2222; b) 0.0667.
28. a) 0.9745; b) 0.6275; c) 0.0497.
29. a) 0.2667; b) 0.8061.
30. 0.0690, 0.3623, 0.3478, 0.2899.
31. a) 0.08; b) não são; c) 0.2667; d) 0.58.
32. a) 27.5% ; b) 20%.
33. a) 0.04; b) 0.16.
34. a) 0.05; b) 0.06; c) 0.2765.
35. a) 0.435; b) é verdade, 0.8965; c) 0.2051.
36. a) 0.1225; b) não.
37. 0.1716.
38. a) 0.9; b) 0.675; c) 0.3077.
39. a) 0.067; b) 0.2687.
40. a) 0.3167; b) 0.53125.
41. a) 0.875; b) 0.375.
42. a) 0.38; b) 0.8421.
43. a) 0.64, 0.01; b) 0.262; c) 0.9771.
44. a) 0.158; b) 0.6077; c) 0.1823.
45. a) 0.0673, 0.5765; b) 0.0016; c) 0.4752.
46. 0.7143
47. 0.7037.
49. a) 0.8333, 0.9.
56. $\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^{j}(1-p)^{n-j}$
57. Não.
58. 0.01, 0.02.
59. a) V; b) F; c) F; d) V; e) F; f) F.